ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THẾ NGHĨA

SỬ DỤNG HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

NGUYỄN THẾ NGHĨA

SỬ DỤNG HÀNG ĐIỂM ĐIỀU HÒA TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số : 60 46 01 13

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGUYỄN DANH NAM

THÁI NGUYÊN - 2016

Mục lục

LỜI MỞ ĐẦU

Hình học phẳng là một chủ đề hấp dẫn trong các kì thi học sinh giỏi. Một bài toán hình học phẳng luôn có thể được giải bằng nhiều cách khác nhau, trong đó áp dụng các khái niệm “hàng điểm điều hòa”, “cực và đường đối cực” được vận dụng để giải các bài toán sẽ cho lời giải một cách ngắn gọn và đẹp mắt. Đây là những công cụ mạnh và thú vị của hình học. Kiến thức về chùm đường thẳng, phép chiếu xuyên tâm, đặc biệt là chùm đường thẳng điều hòa, tứ giác toàn phần cũng được sử dụng để tìm kiếm các hàng điểm điều hòa. Khi xuất hiện các hàng điểm điều hòa, chúng ta dễ dàng sử dụng các kết quả liên quan như hệ thức Đề-các, hệ thức Niu-tơn và hệ thức Mácloranh trong giải bài toán hình học phẳng.

Với hướng khai thác các hàng điểm điều hòa đơn giản và các hàng điểm điều hòa xuất hiện từ quan hệ giữa cực và đường đối cực của một điểm đối với một cặp đường thẳng cắt nhau hoặc đối với một đường tròn nào đó để giải các dạng toán hình học như: chứng minh thẳng hàng, chứng minh đồng quy, chứng minh song song, chứng minh vuông góc, chứng minh điểm cố định, chứng minh đẳng thức, bài toán quỹ tích và bài toán dựng hình. Trong luận văn này, chúng tôi quan tâm đến các bài toán có liên quan đến hàng điểm điều hòa xuất hiện trong các cuộc thi học sinh giỏi toán quốc gia và toán quốc tế. Các bài toán về hàng điểm điều hòa trong luận văn đã được lựa chọn với lời giải của có tính độc đáo và thú vị hơn so với các phương pháp thường gặp. Do vậy, có thể nói kết quả của luận văn cung cấp một công cụ mới cho học sinh trong việc tiếp cận và giải các bài toán hình học phẳng, đặc biệt là các bài toán xuất hiện trong các kì thi học sinh giỏi môn Toán.

Luận văn này được thực hiện tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Danh Nam. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy hướng dẫn đã tận tình giúp đỡ trong suốt quá trình làm luận văn. Tác giả cũng xin chân thành cảm ơn các GS, PGS, TS và các thầy cô giảng viên của Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giảng dạy và tạo mọi điều kiện thuận lợi trong quá trình tác giả học tập và nghiên cứu.

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Tỉ số đơn, tỉ số kép và hàng điểm điều hòa

1.1.1. Độ dài đại số

Trên đường thẳng d chọn véctơ đơn vị $\vec{e}$ thì ta có trục d và hướng của $\vec{e}$ là hướng của trục d.

Định nghĩa 1.1. **[1]** Trên trục d, cho hai điểm A, B. Độ dài đại số của $\overrightarrow{AB}$ là một số có giá trị tuyệt đối bằng $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ và số đó dương nếu $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{e}$ và số đó âm nếu $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với $\vec{e}$. Kí hiệu: $\overline{AB}$.

Các tính chất.

1) $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

2) $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ (A, B, C thẳng hàng).

3) $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$ (với mọi $A_i, i = \overline{1,n}$ thẳng hàng).

1.1.2. Tỉ số đơn

Định nghĩa 1.2. **[1]** Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, tỉ số đơn của chúng lấy theo thứ tự đó là tỉ số $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Kí hiệu: (ABC).

Định lý 1.1. **[1]** Cho hai điểm A, B và một số thực $k \neq 1$ thì tồn tại duy nhất điểm C sao cho $(ABC) = k$.

Chứng minh.

Ta có $(ABC) = k \Leftrightarrow \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = k \Leftrightarrow \overline{CA} = k\overline{CB} \Leftrightarrow \overline{CA} = k\left(\overline{CA} + \overline{AB}\right)$

$$\Leftrightarrow \overline{CA} = k\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) \Leftrightarrow \overline{CA} + k\overline{AC} = k\overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{k}{k-1}\overline{AB} \quad (k \neq 1)$$

Suy ra, tồn tại duy nhất điểm C sao cho $(ABC) = k$.

1.1.3. Tỉ số kép

***Định nghĩa 1.3.* [1]** Cho bốn điểm *A, B, C, D* thẳng hàng, tỉ số kép của chúng lấy theo thứ tự đó là tỉ số $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Kí hiệu: *(ABCD).*

Vậy $\left(ABCD\right)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\left(ABC\right)}{\left(ABD\right)}$.

Các tính chất.

1) Tỉ số kép của bốn điểm là không thay đổi trong các trường hợp sau:

+ Nếu hoán vị cặp điểm đầu với cặp điểm cuối: *(ABCD) = (CDAB).*

+ Nếu đồng thời hoán vị hai điểm đầu và hai điểm cuối:

$$(ABCD) = (BADC)$$

+ Nếu viết chúng theo thứ tự ngược lại: *(ABCD) = (DCBA).*

2) Tỉ số kép của bốn điểm thay đổi trong các trường hợp:

+ Nếu hoán vị hai điểm đầu hoặc hai điểm cuối thì tỉ số kép của bốn điểm trở thành số đảo ngược của nó:

$$(BACD) = (ABDC) = \frac{1}{\left(ABCD\right)}$$

+ Nếu hoán vị hai điểm ở giữa hoặc hai điểm ở đầu và cuối thì tỉ số kép của bốn điểm trở thành phần bù của 1: $\left(ABCD\right)=1-\left(ACBD\right)=1-\left(DBCA\right)$.

1.1.4. Hàng điểm điều hoà

***Định nghĩa 1.4.* [1]** Nếu (*ABCD*) = -1 thì ta nói bốn điểm *A, B, C, D* lập thành một hàng điểm điều hoà hay *A, B* chia điều hoà *C, D* hay *A, B* liên hợp điều hoà đối với *C, D.*

Các tính chất. Cho bốn điểm *A, B, C, D* thẳng hàng, ta có:

1) Hệ thức Đề-các: $\left(ABCD\right)=-1\Leftrightarrow\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$.

2) Hệ thức Niu-tơn: $\left(ABCD\right)=-1\Leftrightarrow IA^2=\overline{IC}.\overline{ID}$ (trong đó *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*).

3) Hệ thức Mácloranh: $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{\mathrm{AJ}}$ (trong đó *J* là trung điểm của đoạn thẳng *CD*).

Chứng minh. Trên đường thẳng *AB*, chọn *O* làm gốc toạ độ.

Đặt $\overline{OA}$ = a, $\overline{OB}$ = b, $\overline{OC}$ = c, $\overline{OD}$ = d, ta có:

$$\overline{CA} = \overline{OA} - \overline{OC} = \mathrm{a} - \mathrm{c}\,; \quad \overline{CB} = \overline{OB} - \overline{OC} = \mathrm{b} - \mathrm{c}$$

$$\overline{DA} = \overline{OD} - \overline{OA} = \mathrm{d} - \mathrm{a}\,; \quad \overline{DB} = \overline{OD} - \overline{OB} = \mathrm{d} - \mathrm{b}$$

Ta có $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a - c}}{\mathrm{b - c}} = -\frac{\mathrm{a - d}}{\mathrm{b - d}}$

$$\Leftrightarrow \mathrm{(a - c)(b - d) = - (a - d)(b - c)}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{2(ab + cd) = (a + b)(c + d)} \qquad (1)$$

+ Chọn *O*≡*A* thì: *OA* = a = 0, *AC* = *OC* = c, *AB* = *OB* = b, *AD* = *OD* = d.

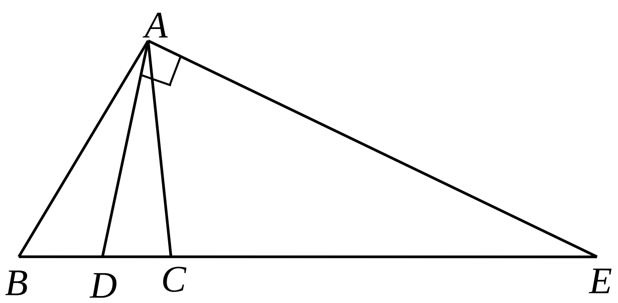
Từ (1) ta có 2cd = bc + bd $\Leftrightarrow \frac{2}{\mathrm{b}} = \frac{1}{\mathrm{d}} + \frac{1}{\mathrm{c}} \Leftrightarrow \frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$.

+ Chọn *O* ≡ *I* thì ta có $\overline{OA} = -\overline{OB}$ hay a = - b.

Từ (1) ta có 2(- a^2 + cd) = 0 $\Leftrightarrow$ a^2 = cd $\Leftrightarrow IA^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$.

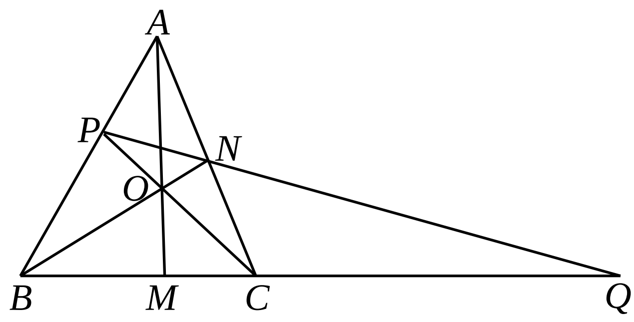
Chứng minh tương tự đối với hệ thức Mácloranh.

Định lý 1.2. **[1]** Nếu *AD, AE* lần lượt là phân giác trong, phân giác ngoài của tam giác *ABC* (*D, E* thuộc đường thẳng *BC*) thì (*BCDE*) = - 1.



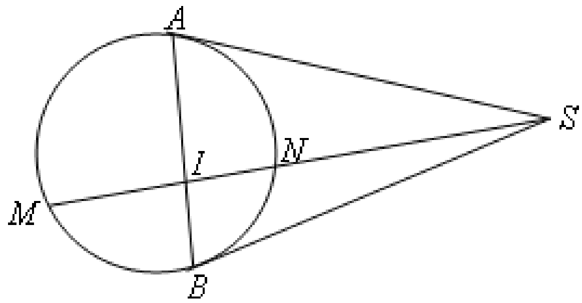
Hình 1.1

Định lý 1.3. **[1]** Cho tam giác *ABC* và điểm *O* không thuộc các đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác. Các đường thẳng *AO, BO, CO* theo thứ tự cắt *BC, CA, AB* tại *M, N, P* và *BC* cắt *NP* tại *Q*. Khi đó ta có (*BCMQ*) = - 1.



Hình 1.2

Định lý 1.4. **[1]** Từ điểm *S* nằm ngoài đường tròn (*O*) kẻ các tiếp tuyến *SA, SB* tới (*O*) (*A, B* là các tiếp điểm). Một đường thẳng đi qua *S* và cắt (*O*) lần lượt tại *M, N,* và *AB* cắt *MN* tại *I*. Khi đó (*SIMN*) = - 1.



Hình 1.3

1.2. Chùm đường thẳng và tứ giác toàn phần

1.2.1. Chùm đường thẳng

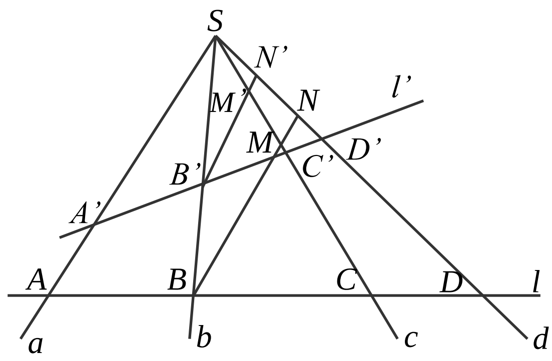
Định nghĩa 1.5. **[1]** Trong mặt phẳng, cho tập hợp các đường thẳng đồng quy tại điểm *S* thì chúng lập nên một chùm đường thẳng và *S* được gọi là tâm của chùm.

Tập hợp các đường thẳng nằm trong mặt phẳng và song song với nhau lập nên một chùm đường thẳng và có tâm tại vô tận.

Định lý 1.5. **[1]** Một chùm bốn đường thẳng cắt một đường thẳng theo hàng điểm có tỉ số kép không thay đổi.

Chứng minh.

** Trường hợp chùm đồng quy tại điểm S:* Gọi *l* là đường thẳng cắt các đường thẳng *a, b, c, d* lần lượt tại *A, B, C, D* và *l'* là đường thẳng cắt các đường thẳng *a, b,* *c, d* lần lượt tại *A', B', C', D'*. Ta cần chứng minh đẳng thức (*ABCD*) = (*A'B'C'D'*) (Hình 1.4).



Hình 1.4

Qua điểm *B* kẻ đường thẳng song song với đường thẳng *a* và cắt đường thẳng *c* tại *N*, cắt đường thẳng *d* tại *M*.

Ta có:

$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{MB}}$ và $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{SA}}{\overline{NB}}$

Từ đó suy ra:

$$\left(ABCD\right) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SA}}{\overline{MB}} : \frac{\overline{SA}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{NB}}{\overline{MB}} \qquad (1)$$

Tương tự, từ điểm *B'* kẻ đường thẳng song song với đường thẳng *a* và cắt đường thẳng *c, d* lần lượt tại *M', N'*.

Ta có $\left(A'B'C'D'\right) = \dfrac{\overline{N'B'}}{\overline{M'B'}}$ (2)

Mặt khác, ta có: $\dfrac{\overline{NB}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{N'B'}}{\overline{M'B'}}$ (3)

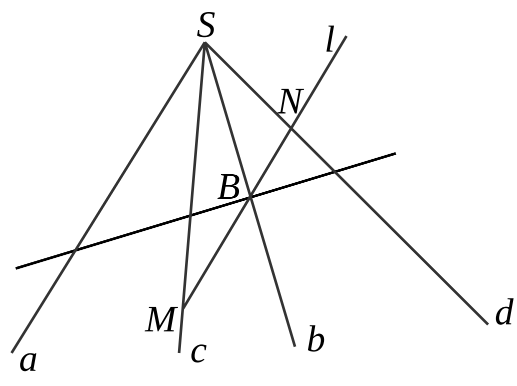
Từ (1), (2) và (3) ta có (*ABCD*) = (*A'B'C'D'*).

* *Trường hợp chùm song song:* Nếu *a* // *b* // *c* // *d* thì ta luôn có đẳng thức (*ABCD*) = (*A'B'C'D'*).

Định nghĩa 1.6. **[1]** Trong mặt phẳng cho chùm bốn đường thẳng *a, b, c, d*. Một đường thẳng *l* bất kì cắt chùm đó tại *A, B, C, D* thì (*ABCD*) được gọi là tỉ số kép của chùm bốn đường thẳng *a, b, c, d*. Kí hiệu: (*abcd*) = (*ABCD*).

Nếu chùm đồng quy tại *S* thì ta kí hiệu: *S*(*abcd*) = (*ABCD*).

Nếu (*abcd*) = - 1 thì ta có một chùm điều hoà, hay *a, b* liên hợp điều hoà với *c, d* hay *a, b* chia điều hoà *c, d*.



Hình 1.5

Định lý 1.6. **[1]** Trong mặt phẳng cho chùm bốn đường thẳng đồng quy. Điều kiện cần và đủ để chùm đó lập thành một chùm điều hoà là: *Một đường thẳng bất kì song song với một trong bốn đường thẳng đó bị ba đường thẳng còn lại chia thành hai đoạn thẳng bằng nhau.*

Chứng minh. Kẻ đường thẳng *l* song song với *a* và cắt *b, c, d* lần lượt tại *M, B, N*.

Theo định lý trên, ta có:

$(abcd) = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{MB}}$ và $(abcd) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{NB}}{\overline{MB}} = -1 \Leftrightarrow \overline{NB} = -\overline{MB}$$

$\Leftrightarrow$ *B* là trung điểm của đoạn thẳng *MN* hay *MB* = *NB* (Hình 1.5).

Hệ quả 1. Trong một chùm điều hoà nếu có hai đường liên hợp vuông góc với nhau thì hai đường đó là các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường còn lại (Hình 1.6a).

Hệ quả 2. Hai đường phân giác của hai góc kề bù chia điều hoà hai cạnh của góc đó (Hình 1.6b). Chùm đường thẳng gồm hai cạnh của một góc và hai đường phân giác của góc đó được gọi là chùm phân giác.